CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI - 2 -

3 heures

L'usage des calculatrices est interdit pour les deux problèmes.
Les deux problèmes sont indépendants.

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

PROBLÈME n° 1

Le but de ce problème est le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$.

1. On définit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, et une application G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $G : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt$.

   1.1. Montrer que f est de classe C^1, et donner sa dérivée.

   1.2. Montrer que G est continue.

   1.3. Montrer que G est de classe C^1 et donner sa dérivée.

2. On définit une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto (f(x))^2$.

   2.1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) + G'(x) = 0$, et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$.

   2.2. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

   2.3. Prouver que, pour tout réel x, G vérifie l'inégalité $0 \le G(x) \le e^{-x^2}$.

   2.4. En déduire la valeur de $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et celle de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ (on pourra utiliser une limite en $+\infty$).

3. On définit une application H de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $H : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$.

   3.1. Justifier la convergence de l'intégrale $H(x)$, pour tout x réel.

   3.2. Montrer que H est continue.

   3.3. Montrer que H est de classe C^1, et donner sa dérivée.

   3.4. Vérifier que H est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $2y' + xy = 0$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

   3.5. Déduire de la question précédente et de la question 3.4. une expression simple de $H(x)$.

PROBLEME n°2

INTRODUCTION :

L'objet du problème est l'étude d'une suite récurrente qui converge vers l'inverse d'un nombre ou l'inverse d'une matrice, et qui peut donc fournir des approximations de cet inverse.

Les deux premières parties étudient respectivement le cas réel et le cas complexe. Les parties III et IV étudient le cas matriciel.

NOTATIONS :

$\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à p lignes et p colonnes pour $p \geq 2$.

Tr (M) est la trace de la matrice $M = [m_{ij}]$, à savoir $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{p} m_{ii}$.

On pourra utiliser sans démonstration $\text{Tr}(M_1 M_2) = \text{Tr}(M_2 M_1)$.

${}^tM$ est la matrice transposée de M.

I_p et O_p sont respectivement la matrice unité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On identifiera un vecteur $X = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$ avec la matrice colonne $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{bmatrix}$.

$\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique pour laquelle $\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, que l'on pourra écrire matriciellement $\|X\| = \left({}^tXX \right)^{\frac{1}{2}}$.

PARTIE I

Dans toute cette partie, α est un réel non nul, et f_α est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = 2x - \alpha x^2$. On définit une suite récurrente réelle $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f_\alpha(u_n).$$

I.1. Prouver que $f_{-\alpha}(x) = -f_\alpha(-x)$ pour tout réel x. Quelle transformation géométrique simple permet de passer du graphe C_α de f_α au graphe $C_{-\alpha}$ de $f_{-\alpha}$?

I.2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\alpha > 0$ et $u_0 \in \left[0, \frac{2}{\alpha}\right]$.

I.3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\alpha > 0$ et $u_0 \notin \left[0, \frac{2}{\alpha}\right]$.

I.4. En déduire, pour α réel quelconque non nul, une CNS portant sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\frac{1}{\alpha}$.

PARTIE II

Dans toute cette partie α est un complexe non nul. On définit une suite récurrente complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$z_0 \in \mathbf{C}, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = 2z_n - \alpha\, z_n^2.$$

II.1. Exprimer $(1 - \alpha\, z_n)$ en fonction de $(1 - \alpha\, z_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

II.2. Exprimer $(1 - \alpha\, z_n)$ en fonction de $(1 - \alpha\, z_0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

II.3. Donner une CNS portant sur z_0 pour que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le complexe $\frac{1}{\alpha}$.

PARTIE III

Dans toute la suite du problème, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On définit une suite récurrente matricielle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$A_0 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \quad , \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = 2A_n - A_n A A_n.$$

III.1. Exprimer $(I_p - AA_n)$ en fonction de $(I_p - AA_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

III.2. En déduire que $(I_p - AA_n) = (I_p - A\,A_0)^{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

III.3. On suppose dans cette question que la matrice $A\,A_0$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a. Prouver que $(I_p - A\,A_0)$ et $(I_p - AA_n)$ sont diagonalisables.

b. Justifier l'équivalence des 3 propositions suivantes :

i) $\lim_{m\to\infty} (I_p - AA_0)^m = 0_p$.

ii) Les valeurs propres de $(I_p - AA_0)$ ont toutes une valeur absolue strictement inférieure à 1.

iii) Les valeurs propres de AA_0 sont toutes dans l'intervalle]0, 2[.

c. En déduire une CNS portant sur A_0 pour que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A^{-1}, inverse de A.

PARTIE IV

Dans cette partie, on étudie un choix de A_0 tel que la CNS de la question III.3.c) soit vérifiée, à savoir :

$A_0 = \dfrac{{}^tA}{Tr(A\,{}^tA)}$. On notera S la matrice $S = A\,A_0 = \dfrac{A\,{}^tA}{Tr(A\,{}^tA)}$.

IV.1. On pose $N(M) = \sqrt{Tr(M\,{}^tM)}$ pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a. Expliciter N(M) en fonction des coefficients m_{ij} de la matrice M.

b. Montrer que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

c. Vérifier que $N({}^tM) = N(M)$.

IV.2. Justifier que la matrice S est diagonalisable.

IV.3. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les valeurs propres, distinctes ou non, de la matrice S.

a. Justifier les égalités : $Tr(S) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1$.

b. Soit X_k un vecteur propre de S pour la valeur propre α_k, et $Y_k = {}^tA\,X_k$.

Justifier les égalités : ${}^tX_kA\,{}^tA\,X_k = \|Y_k\|^2 = \alpha_k N^2(A)\|X_k\|^2$.

c. Déduire des deux questions précédentes que les valeurs propres de S sont dans l'intervalle [0, 1]. Sachant que A est inversible, prouver que 0 ne peut être une valeur propre de S.

IV.4. Déduire des parties III et IV que le choix de $A_0 = \dfrac{{}^tA}{Tr(A\,{}^tA)}$ permet d'assurer la convergence de la suite matricielle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l'inverse A^{-1} de A.